Υποδείξεις Τεστ 3, Απειροστικος Λογισμός 2

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και άρα ολοκληρώσιμη μονότονη στα διαστήματα $[0,\frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2},1]$, με

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^{1/2} f(x)\ dx + \int_{1/2}^1 f(x)\ dx.$$

Υπολογίζουμε τα εκάστοτε ολοκληρώματα παίρνοντας τις ακολουθίες διαμερίσεων των διαστημάτων $[0,\frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2},1]$

$$P_n = \{0 < \frac{1}{2n} < \frac{2}{2n} < \cdots < \frac{n}{2n} = 1\} \text{ και } Q_n = \{\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} + \frac{2}{2n} < \cdots < \frac{1}{2} + \frac{n}{2n} = 1\}.$$

Έτσι, δείχνουμε ότι

$$U(f,P_n) \xrightarrow{n} \frac{1}{12} = \int_0^{1/2} f(x)\ dx \text{ και } L(f,Q_n) \xrightarrow{n} \frac{1}{12} = \int_{1/2}^1 f(x)\ dx.$$

Άρα,

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \frac{1}{6}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε και τα όρια των $L(f,P_n)$ και $U(f,Q_n)$, διότι γνωρίζετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και άρα σας αρκούν τα όρια των $U(f,P_n)$ και $L(f,Q_n)$.

Θέμα 2

(i) Σωστά είναι μόνο τα (b) και (c) (Επιχειρηματολογειστε με την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς).

(ii) Σωστ·ο είναι μόνο το (b).

(iii) Σωστά είναι μόνο τα (a) και (d).

Θέμα 3

(i) Θεωρία (Απόδειξη...)

(ii) Η f^2 είναι συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση και άρα, Από το προηγούμενο ζήτημα έπεται το ζητούμενο.

(iii) Για $f = g$ από το προηγούμενο ζήτημα έπεται το ζητούμενο.

(iv) Η υπόδειξη υπάρχει ήδη στην εκφώνηση.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!